Matematika A1 – cvičení

Příklady z lineární algebry 2.

Lineární závislost, resp. nezávislost skupiny vektorů z R^n , báze prostoru R^n:

1. Najděte hodnotu parametru t , pro kterou jsou lineárně závislé vektory

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 3), \vec{v}_2 = (1, 2, 1), \vec{v}_3 = (t, -1, 7) \ .$$

Zjistěte pak, jakou lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ je vytvořen nulový vektor.

2. a) Definujte pojem base vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané basi .

   b) Ukažte dle definice, že vektory

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 0), \vec{b}_2 = (1, 0, -1), \vec{b}_3 = (0, 1, 2)$$

   tvoří basi prostoru R^3 .

   c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (2, 0, 5)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

3. a) Ukažte , že vektory $\vec{b}_1 = (1, 1, 0),\ \vec{b}_2 = (1, 0, -1),\ \vec{b}_3 = (0, 1, 2)$ tvoří basi prostoru R^3 .

   b) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1, 3, 3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

4 . Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in R^4$:

$$\vec{u}_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 3)\ ,\quad \vec{u}_2 = (0,\ 2,\ 1,\ 0)\ ,\quad \vec{u}_3 = (0,\ 0,\ -1,\ 1)\ .$$

Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.) Tvoří vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ basi prostoru R^4 ? Své tvrzení odůvodněte. Pokud basi netvoří, doplňte tuto skupinu vektorů na basi R^4 .

5. Existuje reálné číslo a , pro které jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ lineárně závislé, je-li :

$$\vec{u}_1 = (0,\ 0,\ -1,\ a^2),\ \vec{u}_2 = (1,\ 2a,\ -a,\ 1),\ \vec{u}_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 3),\ \vec{u}_4 = (0,\ 2,\ a^3,\ 1)\ ?$$

6. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

   a) Najděte všechny vektory $\vec{v}$ z R_5 , pro které platí $A \cdot \vec{v}^T = \vec{o}^T$

   b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor prostoru R^5 dimense 2.

7. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

   a) Najděte všechny vektory $v \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A .

   b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimense 2.

Lineární zobrazení:

1. a) Buďte V a W vektorové prostory a L zobrazení z V do W. Co znamená, že L lineární zobrazení ?
   b) Je-li L je lineární zobrazení V do W a $\vec{o}$ nechť je nulový prvek W.
   Ukažte, že množina vektorů $\vec{v} \in V$, pro které platí $L(\vec{v}) = \vec{o}$, je podprostor prostoru V.
   c) Rozhodněte (a odůvodněte), zda jsou následující zobrazení lineární :
   (i) $K : R^2 \to R^3$, $K(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2,\ x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$;
   (ii) $P : R^3 \to R^3$, $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3, -1)$;
   (iii) $S : R^3 \to R^4$, $S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

---

2. Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
matice lineárního zobrazení $L: R_3 \to R_3$.
   (i) Najděte $L((1,-1,2))$.
   (ii) Ukažte, že k zobrazení L existuje zobrazení inversní a nalezněte jej.
   (iii) Určete vektor (x_1,x_2,x_3) tak, aby $L((x_1,x_2,x_3)) = (-1,1,0)$.

---

3. a) Nechť L je lineární zobrazení, $L : R^3 \to R^3$, pro které platí:
$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   Najděte $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ pro lib.vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ a matici tohoto zobrazení .

   b) Ukažte, že k zobrazení L z části a) existuje inverzní zobrazení a toto inverzní zobrazeni najděte. Můžete zde užít inverzní matici k matici zobrazení L ?

4. Nechť L je lineární zobrazení, $L: R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Najděte $L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ pro lib.vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3$.

Existuje k zobrazení L inverzní zobrazení? Pokud ano, najděte je.

---

5. Je dána matice $$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\2&3&1&-1&2\\0&1&3&-1&0\end{pmatrix}$$

Označme L lineární zobrazení R^5 do R^3, jehož maticí je matice A.

a) Je zobrazení L zobrazení R^5 na R^3?
b) Je zobrazení L prosté?
c) Najděte všechny vektory z R^5, jejich obrazem je nulový vektor.
   Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^5 dimense 2.

---

6. Je dána matice $$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\-2&3&-3&-5\\1&0&3&1\end{pmatrix}$$

Označme L lineární zobrazení R^4 do R^3, jehož maticí je matice A.

a) Je zobrazení L zobrazení R^4 na R^3?
b) Najděte všechny vektory z R^4, jejichž obrazem je nulový vektor. Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimense 2.
c) Je zobrazení L prosté?
d) Najděte všechny vektory z R_4, jejichž obrazem je vektor $b=\begin{pmatrix}4\\-5\\7\end{pmatrix}$.

7. Mějme matici a) $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Určete vlastní čísla matice A.
ii) Najděte vlastní vektory matice A, příslušné nalezeným vlastním číslům matice A. Sestavte čtvercovou matici V, jejíž sloupce jsou vlastní vektory z části ii). Vypočítejte součin matic $V^{-1}\cdot A\cdot V$.

---

8. Je dána matice $$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ukažte, že číslo $\lambda = 2$ je vlastní číslo matice A a najděte vlastní vektor, příslušný tomuto vlastnímu číslu.

---

9. Je dána matice $$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vysvětlete, co znamená, že $\lambda \in C$ je vlastní číslo matice M a $\vec{v}$ je vlastní vektor, příslušný tomuto vlastnímu číslu λ.
b) Ukažte, že číslo $\lambda = -1$ je vlastní číslo matice M .
c) Najděte všechny vlastní vektory , příslušné vlastnímu číslu $\lambda = -1$. Ověřte správnost výpočtu .

---

10. Je dána matice $$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Ukažte, že $\lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$ jsou vlastní čísla matice A.
b) Najděte vlastní vektory, příslušné těmto vlastním číslům.
c) Sestavíte-li čtvercovou matici V, jejíž sloupce jsou vlastní vektory z části b), příslušné po řadě tomuto vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ukažte, že platí

$$V^{-1}\cdot A\cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$